رياضيات

السنة الثالثة من التعليم الثانوي
شعبة العلوم التجريبية

هندة بوشفر
أستاذة التّعليم الثانوي

Éditions Sedia

الفهرس

العنوان	الصفحة
1 - النهايات	3
2 - الاستمرار والاشتقاق	23
3 - الدّوال الأسّيّة	47
4 - الدالة اللوغاريتمية النيبيرية	70
5 - الهندسة الفضائية	96
6 - الأعداد المركبة	120
7 - البرهان بالتراجع و المتتاليات العددية	151
8 - نهاية متتالية	167
9 - الحساب التكاملي	194
10 - الاحتمالات	226

© Éditions Sédia pour la présente édition en Algérie, tous droits réservés pour l'Algérie-Alger 2016.
ISBN : 978-9931-639-03-9

Exos résolus - Maths Terminale S - Enseignement obligatoire et de spécialité.
Claudine Renard et Geneviève Roche.
© HACHETTE Livre 2013, 58, rue Jean Bleuzen, 92178 VANVES CEDEX, ISBN 978-2011608376.

1 - النهايات

الـدرس

في هذا المحور، ℓ و α هي اعداد حقيقية، C_f هو منحنى الدالة f في معلم معطى.

نهاية منتهية عند اللانهاية

تعريف :

1 f معرفة في جوار $+\infty$

$f(x)$ تؤول الى ℓ عندما تؤول x نحو $+\infty$ يعني ان من اجل كل مجال مفتوح يحوي ℓ ، يحوي كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالمقدار الذي نريده. نكتب : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

2 f معرفة في جوار $-\infty$

$f(x)$ تؤول الى ℓ عندما تؤول x نحو $-\infty$ يعني ان من اجل كل مجال مفتوح يحوي ℓ ، يحوي كل قيم $f(x)$ من أجل x سالب قيمته المطلقة كبيرة بالمقدار الذي نريده. نكتب :

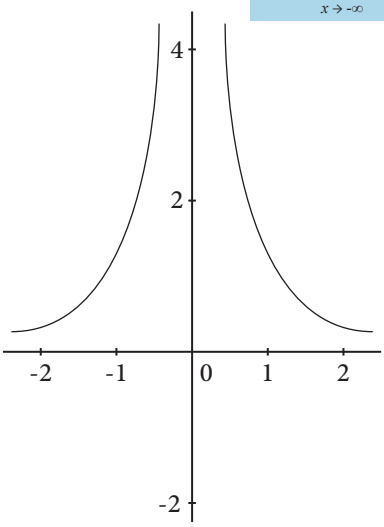
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

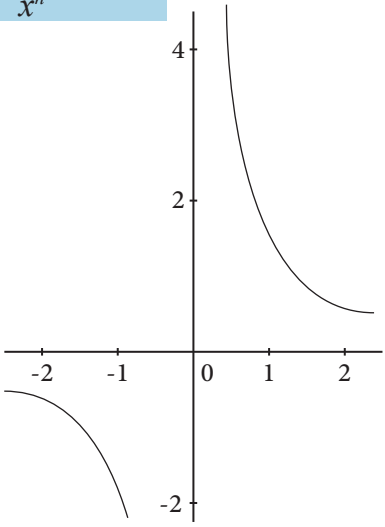
نهاية الدوال الـمرجعية

الدوال $x \mapsto \frac{1}{x}$ ، $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ ، $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ ، $x \mapsto \frac{1}{x^4}$ ،.....نهايتها 0 عند $+\infty$ و $-\infty$

من اجل كل n طبيعي غير معدوم

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$





18 لتكن الدالة $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x} - x + 1$.

1. عين مجموعة تعريف D_f للدالة f ، ثم تحقق أنه ،لحساب نهاية f عند $+\infty$، نجد حالة عدم التعيين .

2. لإزالة هذه الحالة ، نعتبر الدالة g :

$$x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x} + x - 1$$

من اجل x من D_f ، احسب $f(x) \times g(x)$

ما هي نهاية الدالة g عند $+\infty$ ؟ .

برهن : من اجل كل x من $]-\infty;2]$، $g(x)>0$.

استنتج نهاية f عند $+\infty$.

النهايات و الحصر

19 f دالة معرفة على R بـ : $x \mapsto 2x + \sqrt{x^2 + 7}$. عين نهاية الدالة f عند $+\infty$.

20 عين النهاية عند $-\infty$ للدالة f المعرفة على R بـ : $x \mapsto 3x - \sqrt{4x^2 + 5}$

21 علما ان الدالة f تحقق : من اجل كل x ، $f(x) \geq 2$

عين نهايات عند $+\infty$ و $-\infty$ للدالة : $x \mapsto x^3 f(x)$.

22 1. هل الدالة، $f: x \mapsto 2 + sin(x)$ تقبل نهاية عند $+\infty$ ؟

2. ما هي النهاية عند $+\infty$ للدالة $g: x \mapsto x^2 (2 + sin(x))$ ؟

23 عين النهاية عند $+\infty$ للدالة : $f: x \mapsto \sqrt{x} - cos(x)$

24 لتكن الدالة f المعرفة على R^* كما يلي : $f(x) = \dfrac{sin(x)}{x}$.

1. عين نهاية f عند $+\infty$. 2. ما هي نهاية f عند $-\infty$ ؟

مواضيع بكالوريا

25 لتكن الدالة f المعرفة على $R/\{2\}$ بما يلي : $f(x) = \dfrac{x^3 - x - 6}{x - 2}$.

1. عين النهايات التالية : $\lim\limits_{x \to 2} (x - 2)$ ، $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - x - 6)$

هل يمكن تعيين نهاية الدالة f عند 2 ؟

2. انشر العبارة $(x - 2)(x^2 + 2x + 3)$.

استنتج نهاية الدالة f عند 2.

26 نعتبر الدالة f المعرفة على R بما يلي : $f(x) = \dfrac{cos(4x)}{1 + x^2}$

1. من اجل كل عدد حقيقي x ، عين حصرا لـ $cos(4x)$ ، ثم لـ $f(x)$.

2. استنتج نهايات f عند $+\infty$ و $-\infty$. فسر بيانيا نتائجك .

. و الدالة $x \mapsto \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 2$ نهايتها 1- عند $+\infty$.

منه $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

2). الدالة f معرفة على $f : x \mapsto 3x + \sqrt{4x^2 + 1}$. و هي مجموع الدالتين : $x \mapsto 3x$ ، نهايتها $-\infty$ عند $-\infty$.

$x \mapsto \sqrt{4x^2 + 1}$ ، نهايتها $+\infty$ عند $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} 4x^2 + 1 = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ ،

حسب مبرهنة تركيب الدوال :

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{4x^2 + 1} = +\infty$

من أجل كل x من $]-\infty, 0[$: $f(x) = 3x + \sqrt{4x^2 + 1}$

$f(x) = 3x + \sqrt{4x^2 \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)}$.

و منه : $f(x) = 3x - 2x\sqrt{\left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)}$.

$f(x) = x\left(3 - 2\sqrt{\left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)}\right)$. على المجال $]-\infty, 0[$ ، f هي جداء :

. الدالة $x \mapsto x$ ، نهايتها $-\infty$ عند $-\infty$.

. و الدالة $x \mapsto 3 - 2\sqrt{\left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)}$ ، نهايتها 1 عند $-\infty$. منه $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

الجذور و المرافق

17 $f : x \mapsto \frac{\sqrt{6+x} - \sqrt{6}}{\sqrt{x}}$. الدالة f معرفة على المجال $]0, +\infty[$.

الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ و الدالة $x \mapsto \sqrt{6 + x} - \sqrt{6}$ لهما نهاية 0 عند 0 .بالتالي لا يمكن حساب نهاية الدالة f باستعمال العمليات على النهايات .

من أجل كل x من $]0, +\infty[$ ، لدينا

$f(x) = \frac{\sqrt{6 + x} - \sqrt{6}}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{6 + x} + \sqrt{6}}{\sqrt{6 + x} + \sqrt{6}}$

منه $f(x) = \frac{6 + x - 6}{\sqrt{x}\,(\sqrt{6 + x} + \sqrt{6})}$.

من جهة أخرى : $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{6 + x} + \sqrt{6}}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to 0} (\sqrt{6+x} + \sqrt{6}) = 2\sqrt{6}$

اذن : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

18 $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x} - x + 1$ من أجل كل عدد .

معرفة من أجل $x^2 - 2x \geq 0$ أي f الدالة : x حقيقي

$x(x-2) \geq 0$

منه مجموعة تعريف الدالة f هي $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$.

. من أجل x ينتمي الى $]2, +\infty[$:

$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} - (x - 1)$ ، و

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 2x} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$. لا يمكن حساب النهاية باستعمال العمليات على النهايات ، بالتالي يمكن تغير كتابة عبارة الدالة f.

من أجل كل x من $]2, +\infty[$ لدينا:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} - (x - 1))\sqrt{x^2 - 2x} + (x - 1))}{\sqrt{x^2 - 2x} + (x - 1)}$$

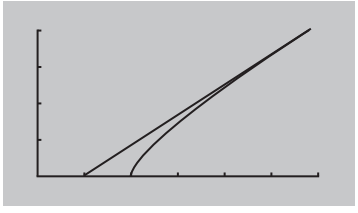
منه $f(x) = \frac{(x^2 - 2x) - (x - 1)^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + (x - 1)}$.

$$f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 2x} + (x - 1)}$$

و بما أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 2x} + (x - 1) = +\infty$ ، فان

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y = x - 1$ هو مستقيم مقارب لمحنى الدالة $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x}$



النهاية بالمقارنة

19 من أجل كل عدد حقيقي x :

$f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 7}$ و $\sqrt{x^2 + 7} > 0$.

اذن $f(x) > 2x$. و نعلم أن $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$. حسب مبرهنة الحصر $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

اذا كانت دالة محدودة من الأسفل بدالة تؤول الى $+\infty$ عند a، فان : $\lim_a f = +\infty$.